

Ogib na pukotini: teorija i pokusi

Velimir Labinac¹, Luka Zurak¹, Marin Karuza^{1,2,3,4}

¹*Odjel za fiziku, Sveučilište u Rijeci*

²*Centar za mikro i nano znanosti i tehnologije, Sveučilište u Rijeci*

³*Fotonika i kvantna optika, Znanstveni centar izvrsnosti za napredne materijale i senzore, Sveučilište u Rijeci*

⁴*INFN Sezione di Trieste, Trieste*

Sažetak. Ogib ili difrakcija elektromagnetskog (EM) vala pojavljuje se nakon što EM val upadne na predmet "oštrih" rubova. Na zaslonu iza predmeta opazit ćemo pojačanja i slabljenja intenziteta, odnosno, u slučaju svjetlosti, svijetla i tamna područja. Ovisno o rubu na koji val upada, područja s pojačanim i oslabljenim intenzitetom imat će različite oblike, a protezat će se i u geometrijsku sjenu predmeta. U pokusima koje smo izveli, promatrali smo ogib na pukotini i kao poseban slučaj, ogib na poluravnini. Pokusi su izvedeni opremom istraživačkog laboratorija jer je cilj bio utvrditi u kojoj se mjeri slike intenziteta svjetlosti mogu usporediti s teorijski dobivenim rezultatima skalarnе teorije ogiba. Posebno, razmotreni su Fraunhoferov i Fresnelov ogib. Metodička vrijednost pokusa i proračuna ovakvog tipa je da će nedvojbeno pobuditi interes srednjoškolaca za fizičke pojave o kojima već nešto znaju, a mogu se jednostavno pripremiti i izvoditi na ljetnim školama i otvorenim danima.

Ključne riječi: ogib na pukotini, skalarna teorija difrakcije, Fraunhoferov ogib, Fresnelov ogib, Rayleigh-Sommerfeldov difrakcijski integral.

UVOD

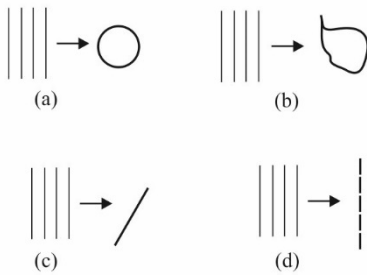
Ogib ili difrakcija¹ u širem smislu, je valna pojava koja nastaje nakon što val upadne na prepreku ili otvor pri čemu dio valne fronte promijeni amplitudu i/ili fazu [1]. Nakon "sudara" s preprekom, dijelovi valne fronte interferiraju stvarajući ogibnu sliku u kojoj se mogu opaziti pojačanja i slabljenja intenziteta vala. Navedeni opis pojave ogiba valjan je za bilo koju vrstu valova: za valove materije, na primjer, za elektrone ili za valove na vodi.

U elektrodinamici razlikujemo ogib i raspršenje elektromagnetskih valova [2]. Ako su rubovi objekta na kojeg upada val "glatki" govorimo o raspršenju, ukoliko su rubovi "oštri" kažemo da se radi o difrakciji. Na primjer, uobičajeno se govori o raspršenju na dielektričnoj kugli ili na dugom, vodljivom valjku, a difrakciju promatramo na pukotini ili na optičkoj rešetki (vidi sliku 1).

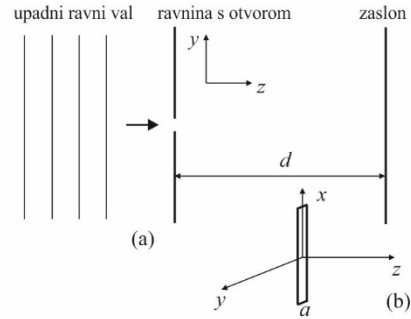
Raspršenje i ogib na mikroskopskoj razini veoma točno opisuje klasični model u kojem se nabijene čestice sredstva od kojeg je načinjena prepreka, ubrzano gibaju i titraju zbog električne komponente upadnog elektromagnetskog vala [1, 2]. Ubrzane nabijene čestice zrače elektromagnetske valove koji se superponiraju u ogibni val. Frekvencija ogibnog vala jednaka je frekvenciji upadnog vala, ali, općenito, ogibni i upadni val imaju različite amplitude i faze. Ukupno elektromagnetsko polje unutar i izvan prepreke je superpozicija upadnog i ogibnog vala.

Ako je prepreka načinjena od vodiča, navedene fizičke procese možemo uspješno objasniti i pomoću makroskopske elektrodinamike [3]. Upadni val inducira struju u sloju prepreke, a struja stvara elektromagnetsko polje. Ukupno polje u sloju i izvan prepreke izračunat ćemo pomoću Maxwellovih jednadžbi i matematičkih uvjeta za polja na rubu prepreke.

¹ Riječ *difrakcija* prvi je upotrijebio talijanski fizičar i matematičar F. M. Grimaldi sredinom 17. stoljeća da opiše pojave u kojima širenje svjetlosti odstupa od pravocrtnog širenja [1].



SLIKA 1 Upad ravnog elektromagnetskog vala na predmete: (a) glatkih rubova; (c) i (d) oštrog rubova; (b) oštrog i glatkih rubova.



SLIKA 2 (a) Upad ravnog elektromagnetskog vala na pukotinu. (b) Pukotina je pravokutni otvor kod kojeg je jedna stranica pravokutnika mnogo dulja od druge, a obje su mnogo dulje od valne duljine.

Promatramo li ogib svjetlosti na otvoru u ravni ili ogib na ravninskoj prepreci, pojačanja i slabljenja intenziteta zapaziti ćemo kao svijetla i tamna područja na zaslonu iza prepreke. Jednostavan primjer za otvor je pukotina (vidi sliku 2), a primjer za ravninsku prepreku je tanki disk. Uobičajeno je valna duljina upadne svjetlosti λ mnogo manja od dimenzija otvora ili prepreke a i upravo su primjeri ogiba za koje je $\lambda \ll a$ najjednostavniji za matematički opis.

U sljedeća dva poglavlja ukratko ćemo izložiti matematičku teoriju difrakcije na pukotini, osvrnuvši se pri tome na poseban slučaj difrakcije na poluravnini. Nakon toga, opisat ćemo pokuse i mjerenja koje smo izvodili da usporedimo teorijski dobivenu krivulju intenziteta svjetlosti i eksperimentalno dobivene podatke za difrakciju laserske svjetlosti na pukotini i poluravnini.

SKALARNA TEORIJA DIFRAKCIJE

Matematički opis difrakcije veoma je složen pa ne čudi činjenica da su neki od najpoznatijih fizičara 18., 19. i 20. stoljeća dali doprinose rješenju tog teškog zadatka. Najraniji matematički radovi o difrakciji povezani su s imenima C. Huygensa, T. Younga, a skalarnu teoriju difrakcije u akustici i optici razvili su A. Fresnel, J. Fraunhofer, H. Helmholtz, J. W. Strutt (Lord Rayleigh) i G. R. Kirchhoff. U godinama nakon otkrića Maxwellovih jednadžbi razvijena je vektorska teorija difrakcije, a najznačajnije doprinose početnom razvoju dali su P. Debye, G. Mie i A. Sommerfeld.

Razmotrit ćemo ogib na otvoru u vodljivoj ravni kojeg skalarna teorija difrakcije opisuje veoma dobro (vidi sliku 2). Pretpostavimo da ravni elektromagnetski val upada okomito na vodljivu ravninu s otvorom. Ravni elektromagnetski val koji se širi u smjeru pozitivne osi z , opisat ćemo realnim dijelom kompleksne funkcije $U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = u_0 e^{i(kz - \omega t)}$, gdje je \mathbf{r} vektor položaja točke promatranja, t je vrijeme, u_0 je amplituda upadnog vala, ω je kružna frekvencija, a k je valni broj upadnog vala. Polje iza pukotine u poluprostoru $z > 0$ opisujemo realnim dijelom kompleksne funkcije $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$.

Funkcija $\Psi(\mathbf{r}, t)$ zadovoljava valnu jednadžbu. Slično, funkcija $\psi(\mathbf{r})$ zadovoljava Helmholtzovu jednadžbu

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 = 0 \quad (1)$$

gdje je Laplaceov operator u kartezijevim koordinatama

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

Jednadžba (1) je parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda i da nađemo njezino potpuno rješenje moraju nam biti poznate vrijednosti funkcije $\psi(\mathbf{r})$ ili vrijednosti normalne derivacije² po ravnini S s otvorom [4]. Ako su poznate vrijednosti funkcije $\psi(\mathbf{r})$ po S , rješenje za (1) ima oblik Rayleigh-Sommerfeldovog difrakcijskog integrala:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i} \int_S \frac{e^{ikR}}{R^2} \left(1 + \frac{i}{kR}\right) (z - z') \psi(\mathbf{r}') dA' \quad (3)$$

gdje je područje integracije ravnina S za koju vrijedi $z' = 0$, a integriramo po crtanim varijablama x' i y' uz element površine dA' . Veličina R je

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (4)$$

Vrijednosti funkcije $\psi(\mathbf{r})$ po S veoma je teško odrediti [1]. Kirchhoff je, zato, predložio jednostavnu aproksimaciju: neka su vrijednosti po otvoru jednake upadnom ravnom valu, $\psi(\mathbf{r}) \approx u(\mathbf{r})$, a po ostatku ravnine jednake nuli. Tada se u (3) integrira samo po otvoru. Ova je aproksimacija valjana samo ako je $\lambda \ll a$, odnosno, $ka \gg 1$, gdje je λ valna duljina upadnog vala, $\lambda = 2\pi/k$ i a dimenzija otvora, na primjer, širina pukotine. Uvjet $\lambda \ll a$ nije teško zadovoljiti u laboratorijskim uvjetima uz korištenje vidljive, laserske svjetlosti.

U vektorskoj teoriji difrakcije računamo vektore električnog i magnetskog polja nakon difrakcije na otvoru ili prepenci pomoću Maxwellovih jednadžbi. Ako se pretpostavi da je funkcija $\psi(\mathbf{r})$ iz skalarne teorije, ustvari, jedna komponenta električnog ili magnetskog polja, može se pokazati da $\psi(\mathbf{r})$, općenito, ne zadovoljava Maxwellove jednadžbe. U slučaju difrakcije na pukotini i poluravnini skalarna teorija je, ipak, dobro usklađena s vektorskom teorijom i daje izvrsne teorijske rezultate potvrđene eksperimentom [2].

Primijetimo da teoriju koju smo razvili za ravninu s otvorom nije teško primijeniti na ravninsku prepreku P . Integraciju u (3) potrebno je izvršiti po skupu $S \setminus P$.

FRAUNHOFEROV I FRESNELOV OGIB

Pretpostavimo da ravni elektromagnetski val upada na ravninu s otvorom dimenzije a i difrakcijsku sliku promatramo na zaslonu čija udaljenost do ravnine iznosi d . Neka je zadovoljen već spomenuti uvjet $a \gg \lambda$. Fraunhoferov ogib ili ogib u granici dalekih polja, dobijemo ako je zadovoljen okviran uvjet

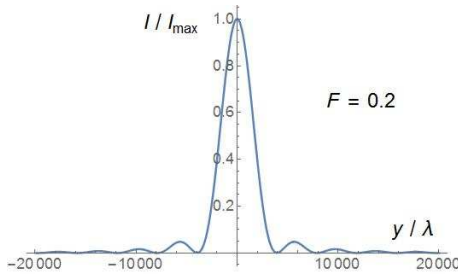
$$F = \frac{a^2}{d\lambda} < 1 \quad (5)$$

Broj F naziva se Fresnelovim brojem. Fresnelov ogib ili ogib u granici bliskih polja dobijemo za

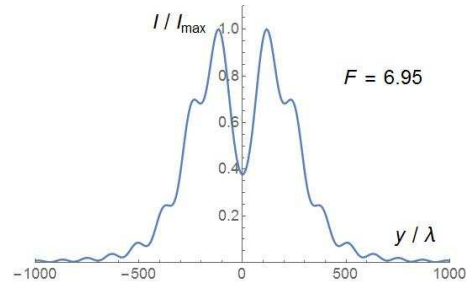
² Normalna derivacija ili derivacija u smjeru normale je definirana izrazom $\partial\psi/\partial n = \nabla\psi \cdot \mathbf{n}$, gdje je operator nabra $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$, a \mathbf{n} je vanjska normala na plohu s otvorom.

$$F = \frac{a^2}{d\lambda} > 1 \quad (6)$$

Neka su zadovoljeni uvjeti Fraunhoferova ogiba. Na veoma udaljenom zaslonu dobit ćemo sliku na kojoj je intenzitet I^3 sličan slici 3.



SLIKA 3 Fraunhoferov ogib na pukotini za $F = 0.2$.



SLIKA 4 Fresnelov ogib na pukotini za $F = 6.95$.

Želimo li da uvjet (5) vrijedi, mora biti $a \ll d$. Ipak, povećamo li dovoljno širinu pukotine tako da je $a \gg \lambda$, difrakcijska slika na udaljenom zaslonu promijenit će se u Fresnelovu: vrijedit će uvjet (6) i dobit ćemo sliku na kojoj je intenzitet sličan slici 4.

Izrazi za Fraunhoferov i Fresnelov ogib na pukotini

Može se pokazati da Rayleigh-Sommerfeldov difrakcijski integral za Fraunhoferov ogib i uz Kirchhoffovu aproksimaciju prelazi u sljedeći integral [2]:

$$\psi(\mathbf{r}) \approx \frac{u_0 k}{2\pi i r} \int_O e^{ikr} e^{-ik(xx'+yy')/r} dA' \quad (7)$$

gdje je područje integracije otvor O . Iz (7) se može pročitati da skalarna teorija difrakcije sadrži Huygens-Fresnelov princip jer dio e^{ikr}/r opisuje sferni val, a integral je, ustvari, zbroj po razlikama faza. Otvor O je izvor sekundarnih sfernih valova koji se superponiraju i oblikuju val iza otvora.

Pomoću formule (7) može se izvesti poznati izraz za intenzitet I pri Fraunhoferovom ogibu na pukotini širine a

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (8)$$

gdje je I_0 maksimalni intenzitet, parametar $\beta = (ka/2) \sin \theta$, a θ kut difrakcije. Izraz za intenzitet pri Fresnelovoj difrakciji na pukotini širine a približno se dobiva iz integrala (3) i glasi [1]

$$I = \frac{I_0}{2} \left| [C(u_2) + iS(u_2)] - [C(u_1) + iS(u_1)] \right|^2 \quad (9)$$

³ Intenzitet je vremenski prosjek Poyntingova vektora [1]. Prilikom crtanja grafova intenziteta, uobičajeno se uzima da je $I = |\psi(\mathbf{r})|^2$. Na osi ordinata crta se veličina I/I_0 , gdje je I_0 najveća ili druga istaknuta vrijednost intenziteta.

gdje su $C(u)$ i $S(u)$ Fresnelovi integrali [5], a I_0 je intenzitet upadnog vala. Varijable u_1 i u_2 definirane su izrazima:

$$u_1 = -\left(\frac{a}{2} - y\right)\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}, \quad u_2 = \left(\frac{a}{2} + y\right)\sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \quad (10)$$

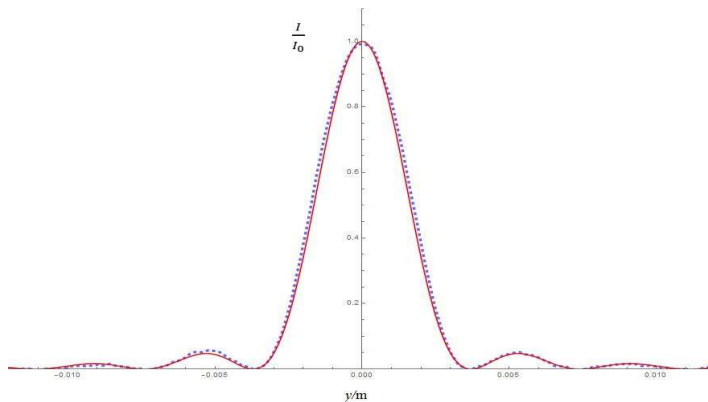
Ogib na poluravnini razmatrali smo kao poseban slučaj ogiba na pukotini u kojem rub $y = -a/2$ teži u $-\infty$, a rub pukotine $y = a/2$ postavili smo na novu vrijednost $y = 0$. Tada se izraz (9) mijenja u

$$I = \frac{I_0}{2} \left| \left[C(u) + \frac{1}{2} \right] + i \left[S(u) + \frac{1}{2} \right] \right|^2 \quad (11)$$

gdje je $u = y(2/\lambda d)^{1/2}$.

POKUSI

Eksperimentalni postav sastoji se od lasera čija je svjetlost valne duljine 532 nm, sustava leća koje prilagođavaju lasersku zraku Gaussova profila eksperimentalnom postavu, pukotine i CMOS senzora fotoaparata Canon EOS 6D. Mjenjajući širinu pukotine i udaljenost pukotina-senzora snimaju se slike s fotoaparatom bez objektiva. Podatci sa senzora se snimaju na računalo gdje se i obrađuju korištenjem programa *QtiPlot* i *Labview*, te se prikazuju zajedno s podacima dobivenim u računalnom programu *Mathematica*. Teorijske krivulje su dobivene ili numerički pomoću izraza (3) ili pomoću približnih analitičkih izraza (8), (9) i (11), u oba slučaja pomoću Kirchhoffove aproksimacije.



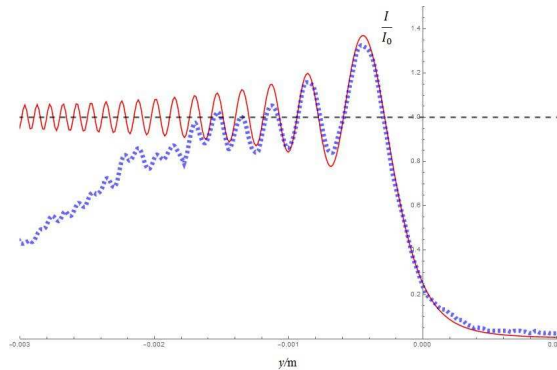
SLIKA 5. Fraunhoferov ogib na pukotini. $d = (1.59 \pm 0.01)$ m, $a = (0.22 \pm 0.04)$ mm, $F \approx 0.06$.
Eksperimentalni podatci prikazani su točkicama u plavoj boji, a teorijski neprekinutom crtom u crvenoj boji.

Na slici 5 prikazan je relativni intezitet ogibnih pruga obzirom na maksimalni intezitet u Fraunhoferovoj granici ($F \approx 0.06$). Vidimo jako dobro slaganje teorije i eksperimenta premda je teorijska krivulja na slici izračunata s nešto drugačijom nominalnom širinom pukotine $a = 0.23$ mm što ulazi u područje jedne standardne pogreške mjerenja širine pukotine.

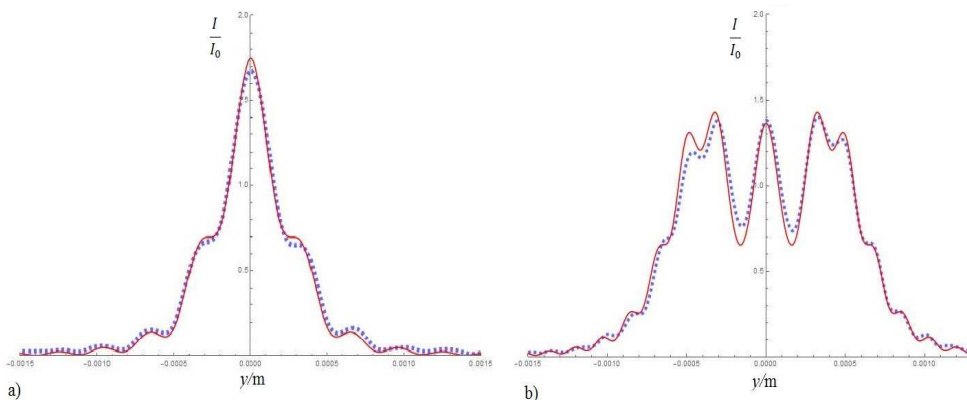
Teorijsku krivulju za ogib na poluravnini prikazan na slici 6 dobili smo numerički pomoću formule (3). Vidimo da se eksperimentalni rezultati jako dobro podudaraju s teorijskim

vrijednostima u području iza ruba poluravnine pa do -0.001 m, nakon čega intezitet cijelog ogibnog uzorka opada. Razlog tomu je što na poluravninu ne dolazi ravan val konstantnog inteziteta po cijelom poprečnom presjeku snopa već val čiji je intezitet raspodijeljen po Gaussovoj krivulji te je približno jednak maksimalnoj vrijednosti (unutar 10 %) u području od 0.001 m oko središta pukotine.

Na slici 7 pod a) i pod b) prikazani su Fresnelovi ogibi za pukotinu ($F > 1$). Ponovo se teorija i eksperiment dobro podudaraju na cijelom području. No, vidljiva su manja odstupanja u pojedinim točkama kao i asimetričnost. Odstupanja su uzrokovana zbog asimetričnosti inteziteta upadne zrake i nelinearnog odaziva senzora fotoaparata.



SLIKA 6. Ogib na poluravnini: $d = (0.50 \pm 0.01)$ m. $a \gg 1 \Rightarrow F \gg 1$. Nula predstavlja rub poluravnine. Eksperimentalni podatci prikazani su točkicama u plavoj boji, a teorijski neprekinutom crtom u crvenoj boji.



SLIKA 7. Fresnelov ogib. a) $d = (0.50 \pm 0.01)$ m, $a = (0.96 \pm 0.04)$ mm, $F = 3.4$. b) $d = (0.50 \pm 0.01)$ m, $a = (1.67 \pm 0.04)$ mm, $F = 10$. Eksperimentalni podatci prikazani su točkicama u plavoj boji, a teorijski neprekinutom crtom u crvenoj boji.

ZAKLJUČAK

Pokusi s ogibom na pukotini i poluravnini pokazali su izvrsno slaganje s teorijom u oba područja, Fresnelovom i Fraunhoferovom. Metodčki je jednostavniji Fraunhoferov slučaj budući

da je funkcija koja opisuje ogib, u odgovarajućoj aproksimaciji, relativno jednostavna za računanje. Fresnelov ogib uključuje složenije izraze za intenzitet i veće varijacije intenziteta koje je, onda, i teže izmjeriti. Jednostavniji pokusi i proračuni povezani s Fraunhoferovim ogibom na pukotini, kružnom otvoru ili optičkoj rešetki poznati su srednjoškolicima i studentima, a njima se testira razmišljanje osnovnih principa ogiba. Pokusi i teorija koje smo izveli idu korak dalje, bliži su istraživačkom radu i zato, veći izazov za učenike i studente.

LITERATURA

1. E. Hecht, *Optics*, 5. izdanje, Pearson Education, Boston, 2017.
2. A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
3. J. Schwinger, L. L. Deraad, K. Milton, W. Tsai, J. Norton, *Classical Electrodynamics*, Westview Press, Boulder, 1998.
4. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3. izdanje, Wiley, New York, 1998.
5. E. W. Weisstein, "Fresnel Integrals" From MathWorld -- A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/FresnelIntegrals.html> (1. 2. 2017)