Neke linearizacije funkcija

Jasenka Celić[1], Karolina Dvojković[2]

[1]*Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci*
[2]*Gimnazija Vukovar, Vukovar*

Sažetak: Linearizirati funkciju znači nelinearnu funkciju prevesti u linearni oblik. Na taj se način omogućava lakše očitavanje s grafova pri mjerenjima. Ova metoda je izrazito korisna pri baždarenju nekih instrumenata. Linearizacijom funkcije dobit je višestruka: bolje predočavanje rezultata mjerenja, izračunavanje neke konstante, aktivno učenje, motivacija, itd. Linearizacijom funkcije u fizici odgojno-obrazovni proces se pretvara u skladnu, sinkroniziranu cjelinu kroz interdisciplinarnost između fizike i matematike. Dobit učenika je velika jer ih na taj način pripremamo za daljnje obrazovanje na fakultetima na kojima će se susretati s nelinearim sustavima koje je potrebno linearizirati te ih na taj način učiniti lakše upravljivima, a samim time i za tržište rada na kojem se sve više javlja potreba za ljudima koji razumiju automatsko upravljanje procesima, bilo da su to proizvodni ili ekonomski procesi. Temu ćemo obraditi kratkim teorijskim uvodom u kojem pristupamo linearizaciji funkcije na dva načina, a to su linearizacija logaritmiranjem i razvojem u Taylorov red u okolini radne točke. Nakon toga, nastavnike ćemo rasporediti u skupine koje će dobiti svoj zadatak linearizacije, tj. radionicu.

Teme radionica: Zakon radioaktivnog raspada – primjer linearizacije u nastavi. Baždarenje fotometra s ravnim zrcalom – linearizacija logaritmiranjem gdje se koeficijenti pravca određuju metodom najmanjih kvadrata.

Ključne riječi: linearizacija funkcije, interdisciplinarnost, aktivno učenje, primjena

UVOD

Često se u fizici susrećemo s mnogim ovisnostima među mjerenim veličinama koje nisu linearne, što učenicima često predstavlja problem. Problem se pojavljuje kada učenici grafički predočavaju mjerene veličine te ih trebaju povezati. Jedno od rješenja je linearizacija. Linearizirati funkciju znači nelinearnu funkciju prevesti u linearni oblik, odnosno umjesto direktnih izmjerenih veličina odabiremo njihove funkcije tako da odnos dviju odabranih veličina bude linearan. Na taj se način omogućava lakše očitavanje s grafova pri mjerenjima. Ova metoda je izrazito korisna pri baždarenju nekih instrumenata. Linearizacijom funkcije dobit je višestruka: bolje predočavanje rezultata mjerenja, izračunavanje neke konstante, aktivno učenje, motivacija, itd.

NEKE LINEARIZACIJE FUNKCIJA

Nelinearnu funkciju možemo prevesti u linearni oblik na način da promijenimo varijable i logaritmiranjem [1, 2].

Zakon radioaktivnog raspada

Radioaktivni raspad je proces u kojem nestabilne atomske jezgre gube energiju u obliku čestica ili elektromagnetskog zračenja. Za sve nuklearne raspade, pa tako i za radioaktivne, zajednički je statistički karakter tih procesa. Jezgre se raspadaju neovisno jedna o drugoj, odnosno izbor jezgre koja se raspada je nasumičan. Ne možemo točno predvidjeti koje će se jezgre raspasti i u kojem trenutku. Vjerojatnost je raspada, bilo koje čestice po jedinici vremena, konstantna. Atomske jezgre određenog nuklida imaju karakterističnu konstantu raspada, koju ćemo označiti s λ, i koja osim o vrsti radioaktivnog nuklida ovisi i o vrsti raspada. Vjerojatnost raspada po nuklidu proporcionalna je vremenskom intervalu (više ih se raspadne što prođe više vremena), te se može uspostaviti određena veza koja je dana izrazom

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t\,, \tag{1}$$

gdje je N broj nuklida u uzorku, ΔN promjena broja nuklida koja se događa u nekom kratkom vremenskom intervalu Δt, a λ tzv. konstanta raspada.

Možemo izračunati kako će se vremenski mijenjati količina radioaktivne tvari u radioaktivnom uzorku, tj. broj N jezgara koje se još nisu raspale. Taj se broj s vremenom eksponencijalno smanjuje prema zakonitosti koja je dana izrazom

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,, \tag{2}$$

gdje je $N(t)$ broj radioaktivnih nuklida u trenutku t, N_0 broj radioaktivnih nuklida u trenutku t =0, a λ konstanta raspada koja je različita za različite jezgre i vrste raspada. Relacija (2) predstavlja zakon radioaktivnog raspada.

SLIKA 1. Kockica predstavlja atomsku jezgru

SLIKA 2. Kockica predstavlja atomsku jezgru, online interaktivna simulacija preuzeta s http://a.teall.info/dice/ [3].

Simulacija radioaktivnog raspada

Da bismo simulirali radioaktivni raspad te omogućili učenicima aktivno sudjelovanje u nastavnom procesu, koji treba rezultirati uspostavljanjem određene logičke veze između eksperimenta i teorije, možemo se poslužiti i uporabom suvremene tehnologije i realnom izvedbom. Za simulaciju radioaktivnog raspada poslužit ćemo se kockicama koje se koriste u društvenim igrama poput jamba, čovječe ne ljuti se i sličnim. Svaka kockica predstavlja nuklid, odnosno atomsku jezgru. Sve kockice koje se nalaze u posudi predstavljaju atomske jezgre radioaktivnog uzorka koje će se raspadati prema zakonu radioaktivnog raspada (2).

Proces radioaktivnog raspadanja započinje prebrojavanjem ukupnog početnog broja jezgri, u našem slučaju 163, koje sudjeluju u procesu radioaktivnog raspadanja u trenutku t=0. Dogovorom odaberemo koje ćemo atomske jezgre smatrati raspadnutim, npr. sve one kockice koje se okrenu na broj 2. Raspadnute jezgre (npr. sve one kockice koje se okrenu na broj 2) izdvojimo iz skupine, te izračunamo broj ostalih atomskih jezgri - kockica koje će se dalje radioaktivno raspadati. Postupak ponavljamo dok nam ne ostane oko 30 kockica - atomskih jezgri u radioaktivnom uzorku. Sve podatke unosimo u ponuđenu tablicu 1 iz koje ćemo kasnije crtati dva grafa. Uporabom programa za tablično računanje MS Excel možemo formirati istovjetnu tablicu, tablica 2. Proces „bacanja“ kockica možemo provesti i uporabom online interaktivne simulacije http://a.teall.info/dice/ [3-5].

TABLICA 1. Ovisnost broja radioaktivnih jezgara o vremenu izraženom u minutama

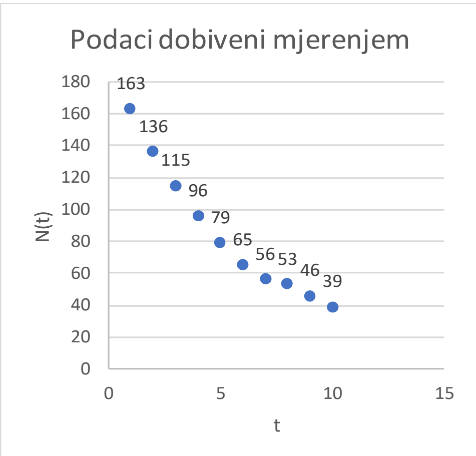
Redni broj bacanja	Vrijeme t/min	N	$\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$
0	0		
1	1		
2	2		
.	.		
10	10		

TABLICA 2. Ovisnost broja radioaktivnih jezgara o vremenu nakon provedene simulacije te unesenih vrijednosti u program za tablično računanje MS Excel

F1 | f_x | =SLOPE(C2:C11;A2:A11)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t (min)	N	ln(N)	ln(N₀/N)	slope,m=	-0,142356		log(N)
2	0	163	5,09375	0	intercept, c=	5,003808		2,212188
3	1	136	4,912655	0,181095				2,133539
4	2	115	4,744932	0,348818	T1/2=	4,869126		2,060698
5	3	96	4,564348	0,529402				1,982271
6	4	79	4,369448	0,724302	N0=	148,9794		1,897627
7	5	65	4,174387	0,919363				1,812913
8	6	56	4,025352	1,068399				1,748188
9	7	53	3,970292	1,123458				1,724276
10	9	46	3,828641	1,265109				1,662758
11	10	39	3,663562	1,430189				1,591065

Na temelju dobivenih vrijednosti iz tablica 1 i 2 crtamo Graf 1. Ako učenicima nije unaprijed poznat zakon radioaktivnog raspada vrlo je malo vjerojatno da će navedenu eksponencijalnu ovisnost N o t prikazanu na grafu 1, a dobivenu na temelju podataka iz tablice 2, samostalno algebarski oblikovati. Ali ako provedemo postupak linearizacije tada sve postaje puno razumljivije i jednostavnije [1, 2].



GRAF 1. Graf ovisnosti $N - t$ izrađen u programu za tablično računanje MS Excel

Linearizacija nelinearne funkcije

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Pristupimo postupku linearizacije navedene nelinearne funkcije.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,, \tag{2}$$

$$\ln(N) = \ln(N_0 \cdot e^{-\lambda t})\,, \tag{3}$$

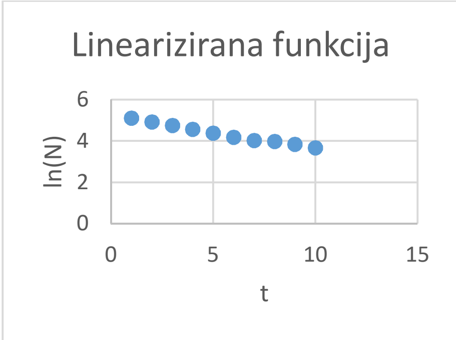
$$\ln(N) = \ln(N_0) + \ln(e^{-\lambda t})\,, \tag{4}$$

$$\ln(e^{B}) = B \cdot \ln(e) = B\,, \tag{5}$$

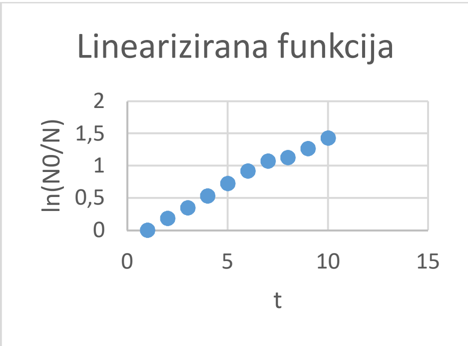
$$\ln(e^{-\lambda t}) = -\lambda \cdot t \cdot \ln(e) = -\lambda \cdot t \tag{6}$$

$$\ln(N) = \ln(N_0) - \lambda t\,, \qquad y = c - m \cdot x \tag{7}$$

Na temelju podataka iz tablice 2 na jednostavan način izračunamo nagib pravca bilo iz grafa 2 ili grafa 3, koji odgovara traženoj konstanti raspada λ. Uz uporabu programa za tablično računanje MS Excel-a izračun je jednostavan. U ćeliji F1 tablice 2 nalazi se formula kako uporabom funkcije slope možemo odrediti vrijednost m koja odgovara konstanti raspada λ. Osim što možemo odrediti konstantu raspada λ također možemo na sličan način odrediti i vrijeme poluraspada $T_{1/2}$ koje je povezano s konstantom raspada λ [1, 2]. Provedimo algebarski postupak određivanja vremena poluraspada $T_{1/2}$. Izraz (2) možemo zapisati i na drugi način, izrazom



GRAF 3. Prikaz linearizirane ovisnosti ln(N) o t



GRAF 2. Prikaz linearizirane ovisnosti ln(N_0/N) o t

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \tag{8}$$

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t}, \tag{9}$$

$$e^{-\lambda \cdot t} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, \tag{10}$$

$$\ln(e^{-\lambda \cdot t}) = \ln(2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}), \tag{11}$$

$$-\lambda \cdot t = -\frac{t}{T_{1/2}} \ln(2), \tag{12}$$

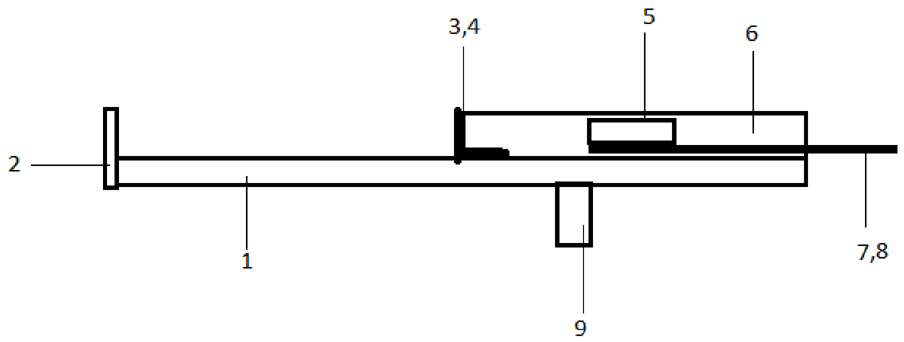
$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}. \tag{13}$$

Umjeravanje fotometra s ravnim zrcalom

Umjeravanje ili kalibracija je skup operacija koje u određenim uvjetima stavljaju odnose među vrijednostima i pokazuju mjerni sustav ili vrijednosti što predstavljaju materijaliziranu mjeru ili referentni materijal i pripadajuće vrijednosti dobivene etalonima (VIM 1993, 6. 11; VIM 1993: *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie*, ukupno izdanje ISO/IEC/OIML/BIMP). Postupak umjeravanja izuzetno je bitan pri izradi instrumenta jer se pravilnim umjeravanjem postiže primjenjivost i kompatibilnost instrumenta

U ovoj radionici napraviti ćemo učeničku vježbu iz astronomije za osnovnu školu, tj. umjeravanje fotometra s ravnim zrcalom i u njoj primijeniti linearizaciju funkcije [6]. Fotometar s ravnim zrcalom je uređaj za mjerenje prividne zvjezdane veličine ili magnitude zvijezde - veličine koja opisuje svjetlost zvijezde kao neposredne pojave na nebu [7].

Mjerenje se izvodi tako da se fotometar usmjeri prema zvijezdi čiju magnitudu želimo izmjeriti i da onda uspoređujemo sjaj zvijezde i sjaj točkice svjetlosti koja nastaje nakon refleksije svjetlosti iz baterijske svjetiljke na ravnom zrcalu. Kada su sjajevi zvijezde i točkice jednaki očita se udaljenost od baterijske svjetiljke do neprozirne folije s rupicom na metarskoj skali (8) u centimetrima. Mjerenje ponavljamo više puta i onda računamo srednju vrijednost iz koje treba odrediti magnitudu zvijezde. Kako to napraviti?



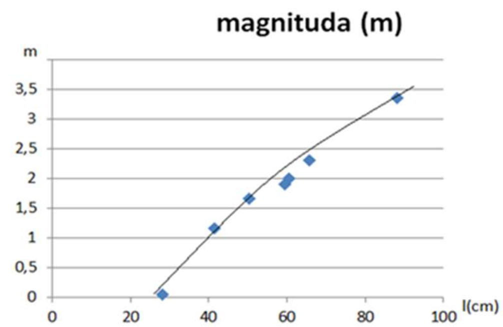
SLIKA 3. Fotometar s ravnim zrcalom sastoji se od motke duljine 2 m (1), malenog ravnog zrcala (2), paus papira (3), neprozirne folije s rupicom (4), duguljaste baterijske svjetiljke (5), plastične cijevi duljine 1m (6), letvice duljine 1m (7) i metarske skale (8)

Mjerenje fotometrom

Prvo treba odabrati 7 zvijezda čija je magnituda već poznata i može se očitati iz programa kao što je Stellarium i za njih izmjeriti udaljenost baterijske svjetiljke od folije s rupicom kada su sjajevi zvijezde i slike u zrcalu jednaki. Mjerenje treba ponavljati i računati srednju vrijednost od koje se računa logaritam. Rezultati mjerenja prikazani su u tablici 3.

TABLICA 3. Rezultati mjerenja za 7 poznatih zvijezda

zvijezda	vrijeme promatranja	magnituda (m)	*l* /cm	log *l*
Kapela	19:00	0,05	28,3	1,45179
Poluks	22:14	1,15	41,5	1,61805
β Tau	20:30	1,65	50,3	1,70157
Kastor	22:17	1,90	59,6	1,77525
Dubhe	23:50	2,00	60,5	1,78176
Merak	23:55	2,30	65,8	1,81823
ε Cas	21:11	3,35	88,1	1,94498



GRAF 4. Ovisnost magnitude o udaljenostima *l*

Ucrtavanjem podataka iz tablice 3. u graf ovisnosti magnitude *m* o udaljenosti *l*, dobije se krivulja iz koje je teško očitavati točne sjajeve nepoznatih zvijezda, graf 4.

Precizniji graf nastaje ako crtamo ovisnost magnitude *m* o logaritmu udaljenosti *l* jer je tada ovisnost linearna, tj. pravac[1,2]. Logaritam se uzima zato što je omjer sjaja zvijezda dvije susjedne magnitude $\sqrt[5]{100} = 2{,}512$, odnosno potencija broja 10.

$$y = ax + b, \tag{14}$$

$$m = a \cdot \log l + b, \tag{15}$$

Najprecizniji pravac dobivamo tako da koeficijente a i b odredimo metodom najmanjih kvadrata [6] prema formulama (16) i (17) pri čemu se i mijenja od 1 do 7 kako uzimamo vrijednosti iz tablice 3. Y je magnituda m, a x je log$l$.

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{16}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{17}$$

Za dane mjerne podatke dobivamo sljedeće sume:

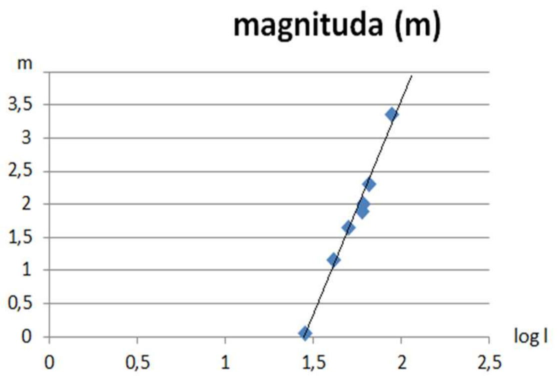
$$\sum x_i = 12.09, \tag{18}$$

$$\sum y_i = 12.40, \tag{19}$$

$$\sum x_i^2 = 21.04, \tag{20}$$

$$\sum x_i y_i = 22.38. \tag{21}$$

Primjenjujući gore navedene formule i izračunate sume dobiva se: a = 6.07 i b = -8.70 te je dobiveni pravac m = 6.07 log l – 8.70



GRAF 5. Linearna ovisnost magnitude m o logaritmu udaljenosti

Pravac je prikazan grafom 5. Sada kada je instrument umjeren, može se određivati magnituda bilo koje zvijezde na način da dobivenu srednju vrijednost udaljenosti logaritmiramo, a onda sa grafa 5. očitamo pripadajuću magnitudu.

LITERATURA

1. G. Curell, *Scientific Data Analysis*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2015.
2. G. Curell, A. Dowman, *Essential Mathematics and Statistics for Science*, John Wiley & Sons Ltd, UK, 2009.
3. Anton Natarov, Online 3D dice roller, URL: http://a.teall.info/dice/ (1.3.2017.)
4. Mustafa Bakaç et al., Procedia Social and Behavioral Sciences 15 (2011) 2196–2200, URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811006252 (10.2.2017.)
5. URL: http://www.physics.usyd.edu.au/teach_res/hsp/u8/e8_decay_activity.pdf (17.3.2017.)
6. Franka Miriam Brückner, URL: http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/mnk.pdf (30.3.2017.)
7. V. Vujnović: *Astronomija 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
8. Zvjezdarnica Zagreb, *E-škola astronomije,* URL: http://eskola.zvjezdarnica.hr/ (7.2.2017.)