Maxwellov demon u zrnu pijeska

Marko Movre i Rok Ćosić, učenici 4. razreda I. gimnazije, Zagreb

Zrnate strukture (granulati) pokazuju svojstva čvrstih tvari (podržavaju određenu težinu), tekućina (poprimaju oblik posude) i plinova (u režimu titranja se može definirati granularna temperatura), a i neka svoja posebna svojstva tako da ih neki smatraju zasebnim stanjem materije.

Plinove je najjednostavnije opisati modelom idealnog plina. Jednadžba stanja idealnog plina je $pV = NkT$, gdje je N broj čestica, k Boltzmanova konstanta, a T temperatura plina koja je određena srednjom kinetičkom energijom molekula plina

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT .$$

Granularni plin je sličan idealnom plinu koji je također sastavljen od čestica sa zanemarivim silama kohezije, no za razliku od plinova termička energija je potpuno zanemariva u zrnatim tvarima. Temperatura okoline nema utjecaja na gibanje zrna već se čestice gibaju zbog pobude – harmonijskog titranja dna posude. Stoga se granularni plin postiže samo u režimu titranja. U tom slučaju granule dobivaju energiju zbog titranja dna posude, ali i gube energiju zbog neelastičnih sudara. Stacionarno stanje se uspostavlja kada je gubitak energije jednak prirastu energije što određuje temperaturu granularnog plina T.

Temperatura $T = C\dfrac{f^2}{N}$ je proporcionalna kvadratu frekvencije titranja f, a obrnuto proporcionalna ukupnom broju čestica N. Tu formulu kvalitativno možemo razumjeti na sljedeći način: kod veće brzine titranja dna čestice u sudaru s dnom dobivaju veću brzinu, time i veću kinetičku energiju, a time je i srednja kinetička energija, tj. efektivna temperatura veća. S druge strane ako istom energijom pobuđujemo veći broj čestica svaka čestica primit će manju energiju pa će i efektivna temperatura biti manja.

Kad promatramo plin u polju sile teže gustoća broja čestica dana je barometarskom jednadžbom

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad (n_0 = \frac{Nmg}{S_{\text{dno}}kT}).$$

Granularni plin nalazi se također u polju sile teže pa se za gustoću broja čestica na nekoj visini h dobiva

$$n(h) = \frac{mg}{S_{dna}kCf^2} N^2 e^{-aN}, \quad a = \frac{mgh}{kCf^2},$$

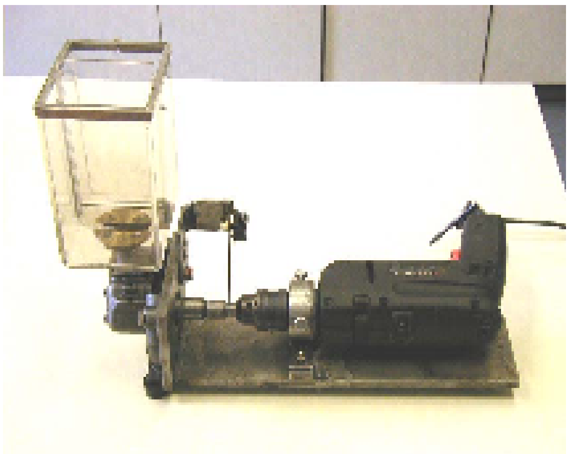
gdje je uzeta u obzir relacija za temperaturu granularnog plina. Za danu frekvenciju, na nekoj visini h, gustoća broja čestica n funkcija je ukupnog broja čestica. Ta funkcija ima maksimum jer najprije za malo N raste kao N^2, a potom za veće N eksponencijalno opada kao e^{-aN}. (Maksimum funkcije je za $N = 2/a$).

Entropija je varijabla koja se može upotrijebiti za opisivanje termodinamičkih sistema. Ona pokazuje smjer odvijanja procesa. Na primjeru idealnog plina to izgleda ovako: zamislimo da su u posudi dva različita plina odvojena pregradom. Uklonimo li pregradu nastat će difuzija plinova. Time se povećao nered (kaotičnost) u sistemu, jer se više ne zna gdje su locirane molekule prvog, a gdje drugog plina. Takav se proces događa spontano. Obratan proces, da se sve molekule prvog plina, gibajući se kaotično u posudi, nađu na jednoj, a molekule drugog na drugoj strani malo je vjerojatan i zanemariv. U prirodi se spontano događaju samo procesi pri kojima se povećava stanje nereda sistema, a samim time i termodinamička vjerojatnost stanja.

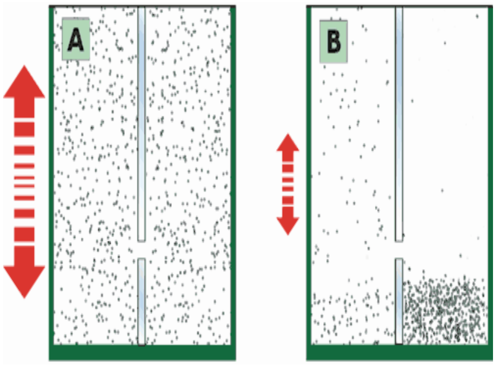
Engleski fizičar J.C. Maxwell predložio je slijedeći misaoni eksperiment u kojem bi bio moguć spontani proces u obrnutom smjeru. U posudi podijeljenoj pregradom na dva jednaka dijela nalazi se istovrsni plin. Pretpostavimo da u pregradi postoje mikroskopska vratašca koja se mogu otvarati i zatvarati bez trenja i mikroskopsko inteligentno biće, "Maxwellov demon", koji njima upravlja. On gleda nailazeće molekule plina i ovisno o njihovoj brzini otvara ili zatvara vratašca, propuštajući one molekule veće brzine od srednje, a ostavljajući one sporije. Time bi se na jednoj strani dobio vrući plin višeg tlaka, a na drugoj strani hladni plin nižeg tlaka. Prvi zakon termodinamike time ne bi bio narušen, ukupna energija ostaje sačuvana, dok bi se rezultat izravno protivio II. zakonu termodinamike. Dakle, Maxwellov demon ne može djelovati u idealnom plinu.

No može li Maxwellov demon djelovati u zrncu pijeska, tj. u granularnom plinu?

Provjerili smo to eksperimentom. Da bismo postigli pravilno titranje posude u kojoj se nalazi zrnata smjesa morali smo izraditi uređaj (slika 1). Bušilicu smo spojili na dorađeni prijenosni sistem iz klima uređaja. Ovakvim prijenosom smo postigli vertikalnu trešnju kadice u koju stavljamo sipki materijal. Kadica harmonijski titra amplitudom od 8 mm. Po sredini ima utor u koji se umeću pregrade s pukotinama na različitim visinama. Bušilicu smo preko autotransformatora uključili u struju da bi naponom mogli kontrolirati frekvenciju. Na uređaj smo pričvrstili brojčanik koji je gumicom spojen na bušilicu. Pomoću tog brojčanika uspjeli smo odrediti frekvenciju titranja (prijenosom okretaja). Materijal koji smo upotrijebili u pokusu je bila je sačma prosječnog promjera 2.4 mm.



Slika 1.



Slika 2.

Prva opažanja su samo kvalitativna. Ako se u kadicu stavi samo jedan sloj granula one će pri trešnji odskakivati pod utjecajem harmonijske sile jer je prostor iznad njih slobodan i ne dolazi ni do kakvih sudara. Odskakivanje kuglica započinje pri minimalnom naponu od 45 V. Stavimo li nekoliko takvih slojeva njihovo gibanje već je drugačije. Zbog sudara među česticama ne dolazi do tolikog poskakivanja. Čestice više "skakuću" i što je viša frekvencija. Ukoliko se poveća broj čestica (na istoj frekvenciji) skakutanje se smanjuje. U odjeljke smo stavili približno isti broj kuglica i pokazalo se da trešnja na visokim frekvencijama ne mijenja značajnije broj kuglica u odjeljcima (slika 2A). Kada smo postepeno smanjivali napon, tj. frekvenciju titranja sustava, ravnoteža je bila narušena: u jednom odjeljku kuglice su i dalje "ludovale" dok su se u drugom gibale bitno sporije (slika 2B). Ta pojava, "hlađenje" kuglica u jednom odjeljku, uočava se smanjenjem frekvencije titranja. Nas je zanimalo da li i kako kritična frekvencija ovisi o visini pukotine. Mijenjajući visinu pukotine procjenjivali smo na kojoj frekvenciji počinje "hlađenje" i pokazalo se da se za više pukotine ta pojava javlja na višoj frekvenciji. Ispod te vrijednosti razlika ponašanje kuglica u odjeljcima bila je sve drastičnija.

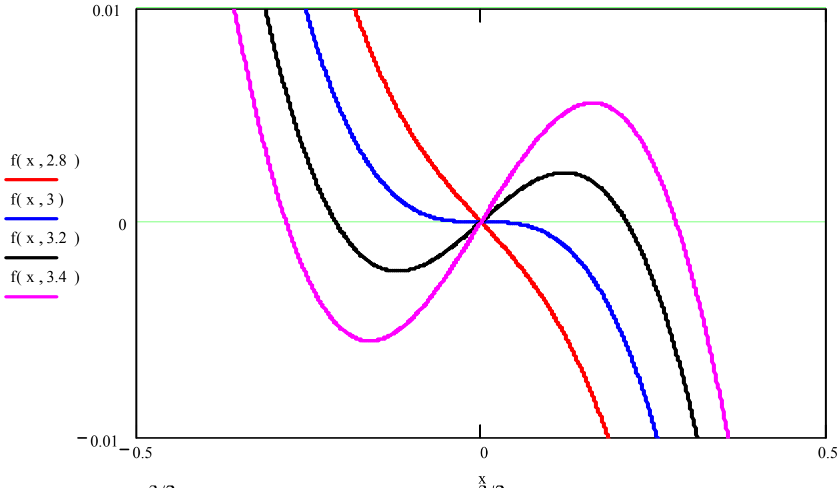
Ove rezultate htjeli smo potkrijepiti brojkama i provjeriti objašnjava li model granularnog plina uočenu pojavu. Za provjeru trebalo je odrediti razliku broja kuglica u odjeljcima za različite frekvencije i različite visine pukotine. Da bi mogli jednostavno odrediti broj kuglica odlučili smo ih vagati. Odredili smo prosječnu masu kuglice i nakon naglog zaustavljanja titranja mjerili smo masu kuglica u odjeljcima. Masa kuglica na početku pojedinih mjerenja iznosila je 42.0 g, što je 500 kuglica. Mjerenja smo vršili s različitim visinama pukotine i pri različitim frekvencijama. Pokazalo se da se pri visokim frekvencijama javlja jedan konstantni prijelaz kuglica koji je uvjetovan nagibom kadice, tako da ga možemo smatrati stalnim. Pri niskim frekvencijama razlike broja kuglica u odjeljcima bile su znatne.

Pokus smo pokušali i obrnutim smjerom. U odjeljke smo stavili bitno različit broj kuglica. Neravnomjerno raspoređene kuglice su se nakon nekog vremena trešnje, pri visokoj frekvenciji, ravnomjerno raspodijelile u odjeljcima, čak i ako su na početku sve kuglice bile samo u jednom odjeljku.

Maxwellov demon kao da djeluje u granularnom plinu. No, što se zapravo događa? Neka je na visini h pukotina površine S . Ukupni tok čestica kroz pukotinu je

$$F = \frac{1}{6} S\left[n_1(h)\overline{v_1} - n_2(h)\overline{v_2}\right] = F_{1\to 2} - F_{2\to 1}.$$

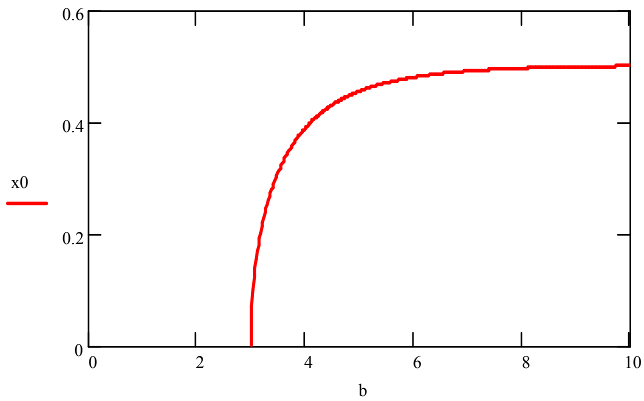
To je razlika broja čestica koje iz dijela 2 prelaze u dio 1 i obratno. Uvjet stacionarnog stanja (F=0), kad je broj čestica koje prelaze iz 1 u 2 izjednačen sa brojem čestica iz 2 u 1, možemo pisati kao f(x) = 0 gdje je $x = |N_2 - N_1|/(2N)$,



$\mathrm{f}(x) = (1/2-x)^{3/2}\exp[-b(1/2-x)] - (1/2+x)^{3/2}\exp[-b(1/2+x)]$, $b = aN$

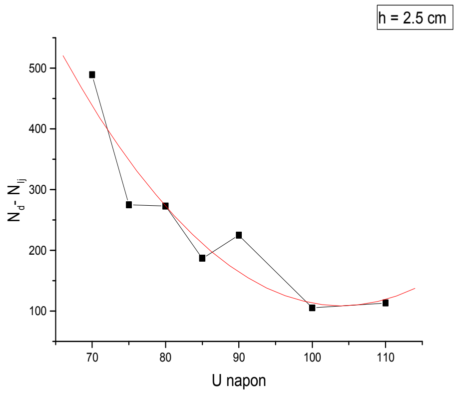
Slika 3.

Objašnjenje: oblik funkcije $\mathrm{f}(x)$ ovisi o parametru b. za $b < b_c=3$ funkcija monotono opada i siječe os x samo u jednoj točki, tj. jednadžba $\mathrm{f}(x) = 0$ ima samo jedno rješenje, $x = 0$. Na slici 3 je prikazana funkcija $\mathrm{f}(x)$ za parametar $b = 2.8$. To znači $N_1 = N_2$, tj. broj čestica je jednak u oba dijela posude, imamo simetričnu, ravnomjernu raspodjelu čestica. Ako parametar b poprimi vrijednost veću od 3 jednadžba $\mathrm{f}(x) = 0$ ima 3 rješenja. Na slici je prikazan i primjer za $b = 3.2$. Osim rješenja $x = 0$ imamo još 2 simetrična rješenja $x = +x_0$ i $x = -x_0$. Kada bi parametar b bio još veći (na primjer $b = 3.4$) x_o bi se također povećavao. Ovisnost stacionarnog parametra x_0 o parametru b prikazuje bifurkacijski dijagram (slika 4).

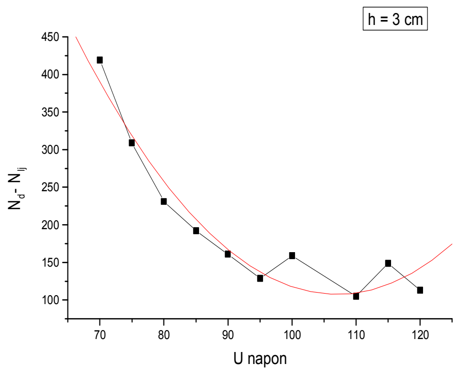


Slika 4.

Objašnjenje: Što je parametar b veći od kritičnog $b = 3$ to je i x_0 veći, tj. veća je i razlika broja čestica $N_2 - N_1 = 2x_0N$. Prisjetimo se $b = aN$, a $a = mgh/kCf^2$. Dakle, razlika broja čestica $N_2 - N_1$ bit će veća što je 1) za danu frekvenciju pukotina smještena više, 2) za danu visinu frekvencija titranja niža.

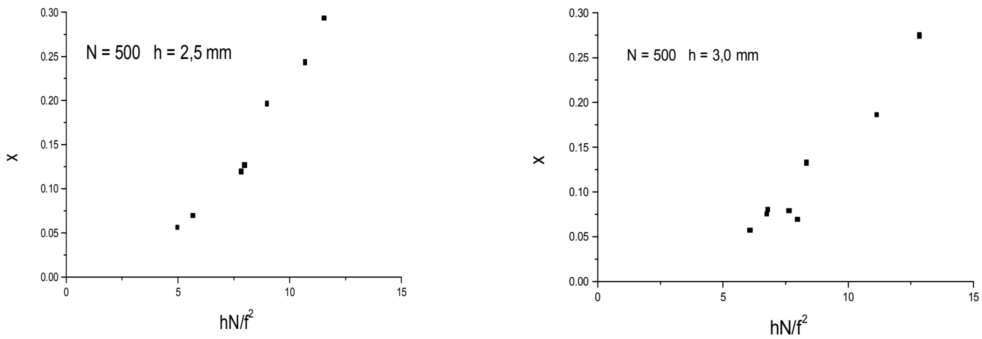


Rezultati mjerenja potvrđuju da je razlika broja čestica to veća što je frekvencija titranja manja (graf 1) kao što predviđa model granularnog plina.



Graf 1.

Rezultate smo prikazali i u obliku bifurkacijskog dijagrama. Graf 2 prikazuje ovisnost parametra $x = |N_2 - N_1|/(2N)$ o veličini hN/f^2 proporcionalnoj parametru b. Mjereći mase kuglica M_1 i M_2 parametar x smo računali kao $x = |M_2 - M_1|/(2M)$, gdje je $M = M_1 + M_2$.



Graf 2.

Da zaključimo – granularni plin se razlikuje od idealnog plina po sudaru čestica. U idealnom su elastični, a u granularnom neelastični. Posljedica toga je da je granularna temperatura proporcionalna kvadratu frekvencije titranja, a obrnuto proporcionalna ukupnom broju čestica. Zbog toga i gustoća granularnog plina na nekoj visini u gravitacijskom polju drugačije ovisi o ukupnom broju čestica nego u idealnom plinu. To je razlog da jednadžba stacionarnog toka može imati 3 rješenja: $x_1 = 0$, što znači kao i za idealni plin $N_1 = N_2$ te dva stabilna rješenja $+x_0$ i $–x_0$, što znači kad bi sustav i bio u stanju $N_1 = N_2$, tj. $x_1 = 0$, mala razlika u broju čestica odvela bi sustav u jedno od stabilnih stanja $+x_0$ ili $–x_0$. Time je simetrija sustava narušena.

Sve skupa možemo promatrati na jednostavniji način: jedna granula padajući na dno prekriveno s nekoliko slojeva granula, odbija se od njega izvodeći kosi hitac. Visina i domet tog hica ovise o brzini granule, koja zbog neelastičnosti sudara ovisi o broju slojeva. Ako je manje slojeva (tvrđa podloga) brzina je veća. Ako se slučajno dogodi da granula padne na deblji sloj brzina joj je manja, manja joj je visina i domet i neće preskočiti u drugu pregradu pa doprinosi debljini sloja. Slijedeća granula tada pada na još mekši sloj, odbija se još manjom brzinom i tako se ubrzano narušava simetrija i granule se skupljaju na jednoj strani ...

Zahvaljujemo se našoj mentorici prof. Tei Prohaski na podršci, a gospodinu Marjanu Marukiću na pomoći u izradi eksperimentalnog uređaja.

Literatura

[1] http://www.aip.org/enews/phynews/1999/split/pnu461-2.htm

[2] P. Kulišić, E. Šuštar, N. Brković: *Mehanika i termodinamika*, Školska knjiga, Zagreb1991.

[3] R. Krsnik, B. Mikuličić: *Međudjelovanja, relativnost, titranja i zvuk*, Školska knjiga, Zagreb 1992.

[4] K. Adamić, J. Herak: *FIZIKA: struktura, stanja i svojstva tvari*, Školska knjiga, Zagreb1981